

Элементарные методы доказательства некоторых классических неравенств

Неравенство Коши

Пусть числа $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Тогда справедливо *неравенство Коши*:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}. \quad (1)$$

Выражение в правой части неравенства называется *средним арифметическим* чисел $x_1, \dots, x_n$; выражение в средней части — их *средним геометрическим*, а в левой — *средним гармоническим*.

Доказательство неравенства Коши. Первый способ.

Лемма 1. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — такие положительные числа, что $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$. Тогда $x_1 + \dots + x_n \geq n$.

Доказательство. Проведем индукцию по n . При $n = 1$ имеем: $x_1 = 1$, значит, неравенство $x_1 \geq 1$ справедливо. База индукции проверена.

Предположим, что утверждение верно для некоторого натурального n , то есть для любых положительных чисел $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$, таких, что $\tilde{x}_1 \cdot \dots \cdot \tilde{x}_n = 1$, выполнено: $\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n \geq n$ (предположение индукции).

Покажем, что тогда утверждение верно и для $n + 1$ (шаг индукции). То есть нужно доказать, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, таких, что $x_1 \cdot \dots \cdot x_{n+1} = 1$, будет выполнено: $x_1 + \dots + x_{n+1} \geq n + 1$. Отметим сначала, что в частном случае $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 1$ утверждение справедливо. Если же не все числа равны единице, то среди них обязательно найдется пара чисел, одно из которых будет меньше 1, а другое — больше (это следует из того, что произведение всех чисел равно 1). Не ограничивая общности, обозначим число, меньшее 1, через x_n , а число, большее 1 — через x_{n+1} . Далее положим $\tilde{x}_1 = x_1, \dots, \tilde{x}_{n-1} = x_{n-1}$, а $\tilde{x}_n = x_n \cdot x_{n+1}$. Получим, что $\tilde{x}_1 \cdot \dots \cdot \tilde{x}_n = 1$. Значит, по предположению индукции $\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_n \geq n$. Это означает, что $x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geq n$. В левой части последнего неравенства добавим и вычтем выражение $x_n + x_{n+1}$:

$$x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + x_n \cdot x_{n+1} - x_n - x_{n+1} \geq n.$$

Отсюда

$$x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq n - x_n \cdot x_{n+1} + x_n + x_{n+1} = n + 1 - (x_n - 1)(x_{n+1} - 1).$$

Осталось заметить, что $n + 1 - (x_n - 1)(x_{n+1} - 1) > n + 1$, так как $(x_n - 1)(x_{n+1} - 1) < 0$, поскольку $x_n < 1$, а $x_{n+1} > 1$. Утверждение полностью доказано. $\square$

Теперь для произвольных положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначим $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = a^n$, тогда $\frac{x_1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{a} = 1$. Согласно лемме, $\frac{x_1}{a} + \dots + \frac{x_n}{a} \geq n$, откуда

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq a = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Правая часть неравенства Коши доказана. Для доказательства неравенства в левой части достаточно применить правую часть к числам $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$. Заметим еще, что при доказательстве леммы мы фактически показали, что либо $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, либо $x_1 + \dots + x_n > n$. Значит, знак равенства в неравенстве Коши достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = \dots = x_n$.

Второй способ. Будем доказывать правое неравенство, поскольку левое из него легко следует. Проверим сначала, что неравенство справедливо в случае $n = 2^m$ для некоторого натурального m . Проведем индукцию по m . При $m = 1$ получаем: $n = 2$, $x_1, x_2 > 0$, тогда неравенство $x_1 \cdot x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$ равносильно $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ — верно. База индукции проверена.

Предположим, что неравенство справедливо для некоторого $m \in \mathbb{N}$, т. е.

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_{2^m} \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \dots \cdot x_{2^{m+1}} &= (x_1 \cdot \dots \cdot x_{2^m}) \cdot (x_{2^m+1} \cdot \dots \cdot x_{2^{m+1}}) \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m} \cdot \left(\frac{x_{2^m+1} + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^m}\right)^{2^m} \leq \\ &\leq \left(\left(\frac{\frac{x_1 + \dots + x_{2^m}}{2^m} + \frac{x_{2^m+1} + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^m}}{2}\right)^2\right)^{2^m} = \left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь n — произвольное натуральное число. Тогда найдем такое $m \in \mathbb{N}$, что $2^m > n$ и обозначим $A = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$; $y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n, y_{n+1} = \dots = y_{2^m} = A$. Получим

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot A^{2^m-n} &= y_1 \cdot \dots \cdot y_{2^m} \leq \left(\frac{y_1 + \dots + y_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m} = \\ &= \left(\frac{x_1 + \dots + x_n + A \cdot (2^m - n)}{2^m}\right)^{2^m} = \left(\frac{A \cdot n + A \cdot (2^m - n)}{2^m}\right)^{2^m} = A^{2^m}, \end{aligned}$$

откуда

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_n \leq A^n = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^n.$$

Неравенство полностью доказано.

Следствие. Пусть $\alpha \neq 0$ — произвольное вещественное число. Тогда

$$(\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n})^\alpha = \sqrt[n]{x_1^\alpha \cdot \dots \cdot x_n^\alpha} \leq \frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n}.$$

Отсюда получаем, что при $\alpha > 0$ имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \left(\frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha},$$

а при $\alpha < 0$ — неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \left(\frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha}.$$

Неравенство Йенсена

Определение 1. Пусть функция f определена и непрерывна на интервале (a, b) . Назовем ее *выпуклой вверх (вниз)*, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ график функции на интервале между точками x_1 и x_2 лежит не ниже (не выше) хорды A_1A_2 , где $A_1 = (x_1, f(x_1))$, $A_2 = (x_2, f(x_2))$.

Заметим, что точка x лежит между точками x_1 и x_2 тогда и только тогда, когда $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Уравнение хорды A_1A_2 имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Подставим $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, получим

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{(\lambda_1 - 1)x_1 + \lambda_2 x_2}{x_2 - x_1} = \frac{\lambda_2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \lambda_2 = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

откуда $y = \lambda_2 f(x_2) - \lambda_2 f(x_1) + f(x_1) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$. тогда условие того, что график функции лежит не ниже (не выше) хорды, дает *неравенство Йенсена*: пусть функция f выпукла вверх на интервале (a, b) ; тогда для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, для любых $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, справедливо неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \quad (2)$$

Для функции, выпуклой вниз, справедливо соответственно

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \quad (3)$$

Можно доказать *обобщенное неравенство Йенсена*: пусть функция f выпукла вверх (вниз) на интервале (a, b) ; тогда для любых $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$, для любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, справедливо неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq (\leq) \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n). \quad (4)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$, она выпукла вниз на любом интервале. Положим в неравенстве (4) $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, получим, что для любых чисел $x_1, \dots, x_n$ справедливо

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}.$$

Получаем неравенство между средним арифметическим и *средним квадратичным*:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Неравенство Юнга

Применим неравенство Йенсена к функции $f(x) = \ln x$. Пусть a, b — положительные числа; $p, q > 1$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (такие числа называют *сопряженными*). Положим $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$. Тогда (поскольку функция $\ln x$ является выпуклой вверх на положительной полуоси):

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) &= \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 = \frac{1}{p} \ln x_1 + \frac{1}{q} \ln x_2 = \\ &= \ln \left(x_1^{1/p} \cdot x_2^{1/q} \right) = \ln \left((a^p)^{1/p} \cdot (b^q)^{1/q} \right) = \ln(ab), \end{aligned}$$

откуда получаем *неравенство Юнга*: пусть $a, b > 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тогда

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \quad (5)$$

Неравенство Гёльдера

Пусть $x_k, y_k, k = 1, \dots, n$ — некоторые положительные числа. Зафиксируем некоторое k от 1 до n и положим в неравенстве Юнга $a = \frac{x_k}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p}}$, $b = \frac{y_k}{\left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}}$, где p, q — сопряженные индексы. Тогда

$$\frac{x_k y_k}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}} = ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{x_k^p}{p \sum_{k=1}^n x_k^p} + \frac{y_k^q}{q \sum_{k=1}^n y_k^q}.$$

Просуммируем обе части полученного неравенства по k от 1 до n :

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{p \sum_{k=1}^n x_k^p} + \frac{\sum_{k=1}^n y_k^q}{q \sum_{k=1}^n y_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда получаем *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q} \quad (6)$$

для любых положительных $x_k, y_k, k = 1, \dots, n$.

Неравенство Минковского

Пусть $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$; $p > 1$. Тогда справедливо *неравенство Минковского*

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}. \quad (7)$$

Доказательство. Обозначим через q сопряженный индекс к числу p , тогда $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$, следовательно, $q = \frac{p}{p-1}$. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq \\ & \text{(применим неравенство Гёльдера)} \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \\ & + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} = \left(\left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{1/p} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

Разделим обе части полученного неравенства на $\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$, получим необходимое утверждение.

Неравенство Коши–Буняковского

Определение 2. Пусть x, y — векторы (на плоскости, в $\mathbb{R}^3$ или в произвольном вещественном линейном векторном пространстве X). Их **скалярным произведением** назовем отображение $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам:

- 1) (неотрицательность и невырожденность) $(x, x) \geq 0$ для любого $x \in X$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- 2) (симметричность) $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in X$;
- 3) (линейность по первому аргументу) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in X$.

Пусть $x, y \in X$, $x \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим $f(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$. Тогда согласно свойствам скалярного произведения

$$0 \leq f(\lambda) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y).$$

Получили квадратный трехчлен переменной λ с коэффициентом при старшей степени $(x, x) > 0$. Он является неотрицательным при всех значениях $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда и только тогда, когда его дискриминант $D \leq 0$ или, эквивалентно, $0 \geq D/4 = (x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y)$. Получили *неравенство Коши–Буняковского*

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x) \cdot (y, y)}. \quad (8)$$

Заметим, что если при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ достигается знак равенства, то $\lambda_0 x + y = 0$, т. е. векторы x и y коллинеарны.