Дополнительные главы тригонометрии

А. И. Аристов

1 Теоретические сведения

1.1 Основные понятия классической тригонометрии

Напомним определения тригонометрических функций[1]. Рассмотрим окружность[2] $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$. Выберем на окружности точку $A = (x; y)$. Обозначим через φ значение угла AOB в радианах, где $O = (0; 0)$, $B = (R; 0)$. Синус, косинус, тангенс и котангенс аргумента φ[3] вводятся соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sin\varphi = y/R; \\ &\cos\varphi = x/R; \\ &\operatorname{tg}\varphi = y/x; \\ &\operatorname{ctg}\varphi = x/y. \end{aligned}$$

Синус и косинус определены для всех действительных аргументов, тангенс — для всех действительных аргументов, кроме имеющих вид $\pi/2 + \pi n$ (n — целое), котангенс — для всех действительных аргументов, кроме имеющих вид πn (n — целое). Синус и косинус имеют период 2π, тангенс и котангенс — π.

Исследуем разрешимость простейших тригонометрических уравнений:

$$\begin{aligned} &\sin\varphi = a; \\ &\cos\varphi = a; \\ &\operatorname{tg}\varphi = a; \\ &\operatorname{ctg}\varphi = a, \end{aligned}$$

где a дано.

Выберем отрезок наименьшей длины, на котором синус принимает все свои значения ровно один раз. Традиционно в качестве такого отрезка выбирают $[-\pi/2;\ \pi/2]$. На этом отрезке синус монотонно возрастает, проходя значения от -1 до 1. Значит, на отрезке $[-1;\ 1]$ определена функция, обратная к синусу, принимающая значения из множества $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Эта функция называется арксинусом и обозначается arcsin. Таким образом, на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$ уравнение $\sin\varphi = a$ имеет единственное решение $\varphi = \arcsin a$ при $|a| \leqslant 1$ и не имеет решений в противном случае. Если речь идет обо всех действительных φ, то уравнение имеет бесконечное множество решений, причем это множество можно описать с помощью арксинуса (естественно, считаем, что $|a| \leqslant 1$). Во-первых, из симметрии тригонометрического круга видно, что если φ_0 — решение, то и $\pi - \varphi_0$ — решение. Во-вторых, поскольку

[1] В курсе элементарной математики принято вводить тригонометрические функции с помощью геометрических построений. Существуют и аналитические определения, не ссылающиеся на геометрические понятия (В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть 1. Дополнение к главе 4).

[2] В определениях тригонометрических функций участвуют только точки окружности $x^2 + y^2 = R^2$, но неформально эту конструкцию иногда называют «тригонометрическим кругом».

[3] Традиционно считается, что φ возрастает при вращении радиуса OA против часовой стрелки. Допускаются и отрицательные значения.

синус периодичен, прибавление к решению величины $2\pi n$ (n — целое) дает другое решение. Таким образом, множество решений уравнения $\sin\varphi = a$ состоит из двух частей:

$$\varphi = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z \tag{1}$$

и

$$\varphi = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z \tag{2}$$

(напомним, что через Z обозначается множество всех целых чисел). Можно описать все множество решений с помощью одной формулы [4]:

$$\varphi = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z. \tag{3}$$

Действительно, если подставлять в (3) четные и нечетные n, то будем получать соответственно выражения (1) и (2). Иногда для описания всего множества решений используется обозначение Arcsin:

$$\operatorname{Arcsin} a = \{\varphi \in R:\ \sin\varphi = a\} = \{(-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z\}$$

(напомним, что через R обозначается множество всех действительных чисел). Подчеркнем, что результат применения арксинуса «с маленькой буквы» — это число, а результат применения арксинуса «с большой буквы» — множество.

Аналогично можно исследовать другие простейшие тригонометрические уравнения.

Арккосинус (arccos) — это функция, обратная к косинусу, рассматриваемому на отрезке $[0;\ \pi]$. Она определена на отрезке $[-1;\ 1]$. Общее решение уравнения $\cos\varphi = a$ при $|a| \leqslant 1$ имеет вид

$$\varphi \in \operatorname{Arccos} a = \{\varphi \in R:\ \cos\varphi = a\} = \{\pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z\}$$

(при других a уравнение неразрешимо).

Арктангенс (arctg) — это функция, обратная к тангенсу, рассматриваемому на интервале $(-\pi/2;\ \pi/2)$. Она определена на всем множестве R. Общее решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi = a$ при $a \in R$ имеет вид

$$\varphi \in \operatorname{Arctg} a = \{\varphi \in R:\ \operatorname{tg}\varphi = a\} = \{\operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z\}.$$

Арккотангенс (arcctg) — это функция, обратная к котангенсу, рассматриваемому на интервале $(0;\ \pi)$. Она определена на всем множестве R. Общее решение уравнения $\operatorname{ctg}\varphi = a$ при $a \in R$ имеет вид

$$\varphi \in \operatorname{Arcctg} a = \{\varphi \in R:\ \operatorname{ctg}\varphi = a\} = \{\operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z\}.$$

[4]Многие учащиеся путают понятия обратной тригонометрической функции и множества решений простейшего тригонометрического уравнения. Следует обратить внимание, что обратная тригонометрическая функция (если определена) ставит в соответствие своему аргументу ровно одно число: $y = \arcsin a$. Множество решений уравнения $\sin\varphi = a$ (если оно разрешимо) бесконечно, причем по найденному числу y можно построить все это множество: $\varphi \in \{\ldots,\ y,\ -y+\pi,\ y+2\pi,\ -y+3\pi,\ y+4\pi, \ldots\}$. В компактной форме это множество можно описать формулой (3), подразумевая, что если подставлять в нее конкретные значения из всего множества целых чисел Z, то будем получать все те и только те числа, которые удовлетворяют уравнению.

1.2 Гиперболические и обратные гиперболические функции

Гиперболические функции (гиперболический синус, гиперболический косинус, гиперболический тангенс и гиперболический котангенс) обозначаются и определяются соответственно следующим образом:

$$\operatorname{sh} x = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2};$$
$$\operatorname{ch} x = \tfrac{e^x + e^{-x}}{2};$$
$$\operatorname{th} x = \tfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$
$$\operatorname{cth} x = \tfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Непосредственно из определений вытекают следующие свойства гиперболических функций (таблица 1).

	sh	ch	th	cth
Область определения	R	R	R	$R \setminus \{0\}$
Область значений	R	$[1;\ \infty)$	$(-1;\ 1)$	$(-\infty;\ -1) \cup (1;\ \infty)$
Четность	Нечетная	Четная	Нечетная	Нечетная
Точки пересечения графиков с осями координат	$(0;\ 0)$	$(0;\ 1)$	$(0;\ 0)$	Отсутствуют
Множества, где функция принимает положительные значения	$(0;\ \infty)$	R	$(0;\ \infty)$	$(0;\ \infty)$
Множества, где функция принимает отрицательные значения	$(-\infty;\ 0)$	отсутствуют	$(-\infty;\ 0)$	$(-\infty;\ 0)$
Промежутки возрастания	R	$[0;\ \infty)$	R	Отсутствуют
Промежутки убывания	отсутствуют	$(-\infty;\ 0]$	отсутствуют	$(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ \infty)$
Экстремумы	Максимумы отсутствуют у всех гиперболических функций; минимум есть только у гиперболического косинуса: он достигается в точке 0, значение равно 1.			

Таблица 1: Основные свойства гиперболических функций.

Следует обратить внимание, что гиперболический котангенс убывает на каждом из двух лучей, указанных в таблице, но не на их объединении. Другими словами, было бы некорректно сказать, что он убывает на всей своей области определения, которая представляет собой множество $R \backslash \{0\} =$

$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$[5]. Действительно, на каждом луче большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, но если взять $x_1 < 0 < x_2$, то окажется, что $\operatorname{cth} x_1 < 0 < \operatorname{cth} x_2$.

Области определения легко найти из формул, которыми задаются функции. Область значений функции $f(\cdot)$ представляет собой множество таких y, при которых уравнение $f(x) = y$ относительно x имеет хотя бы одно решение. Промежутки возрастания и убывания можно найти элементарными средствами, не прибегая к дифференцированию. Докажем, например, что гиперболический косинус возрастает на $[0;\ \infty)$, т. е. если $0 \leqslant a < b$, то $\operatorname{ch} a < \operatorname{ch} b$. Действительно,

$$\begin{aligned}&\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a = \tfrac{e^b+e^{-b}}{2} - \tfrac{e^a+e^{-a}}{2} = \tfrac{e^a\left(e^{b-a}-1\right)-e^{-b}\left(e^{b-a}-1\right)}{2} = \\ &= \tfrac{\left(e^{b-a}-1\right)\left(e^a-e^{-b}\right)}{2} = \tfrac{e^{-b}\left(e^{b-a}-1\right)\left(e^{a+b}-1\right)}{2},\end{aligned}$$

а это выражение, очевидно, положительно при указанных a и b, откуда следует возрастание функции на названном множестве.

Отметим, что в окрестности нуля графики гиперболического косинуса и синуса похожи соответственно на параболу и кубическую параболу. Это связано с тем, что при малых x имеют место следующие представления:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + O\left(x^4\right),\ \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + O\left(x^5\right).$$

Однако, при $|x| \to \infty$ имеет место экспоненциальное поведение:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{|x|}}{2} + O\left(e^{-|x|}\right),\ |\operatorname{sh} x| = \frac{e^{|x|}}{2} + O\left(e^{-|x|}\right).$$

График гиперболического тангенса напоминает график арктангенса: он тоже находится между двумя горизонтальными прямыми и пересекает ось абсцисс в начале координат под углом $\pi/4$. Однако, при $x \to \pm\infty$ гиперболический тангенс стремится к ± 1, а не $\pm\pi/2$.

Для решения простейших гиперболических уравнений нужны обратные гиперболические функции (ареа-функции).

Ареа-синусом (arsh) называется функция, обратная к гиперболическому синусу. Она определена на R и принимает все действительные значения. Если же решать уравнение $\operatorname{sh} x = a$ относительно x, легко получить выражение с логарифмом. Таким образом, при всех действительных a имеет место следующая равносильность:

$$\operatorname{sh} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arsh} a \equiv \ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right).$$

Гиперболический косинус ограничен снизу единицей и является четной функцией. Для него принято вводить обратную функцию — ареа-косинус

[5]В комплексном анализе важную роль играет понятие единого для всей плоскости бесконечно удаленного элемента ∞. Действительно, на плоскости нет понятий «больше» и «меньше», и вводить положительную и отрицательную бесконечности нецелесообразно. Но в действительном анализе обычно не возникает недоразумений, если обозначать символом ∞ положительную бесконечность. Если же надо подчеркнуть, что величина стремится к беззнаковой бесконечности, не стремясь к бесконечности положительной, предлагаю сделать это с помощью модуля: $|(-1)^n n| \to \infty$, но $(-1)^n n \not\to \infty$.

В литературе встречаются оба варианта, т. е. под ∞ могут понимать и положительную бесконечность, и беззнаковую. Обычно из контекста очевидно, что имелось в виду.

(arch), — заданную на промежутке $[1;\ \infty)$ и принимающую значения из множества $[0;\ \infty)$. Ареа-косинус легко выразить через логарифм. Таким образом, если $a < 1$, то уравнение $\operatorname{ch} x = a$ не имеет решений, а если $a \geqslant 1$, то оно имеет два решения (совпадающих при $a = 1$):

$$\operatorname{ch} x = a \Leftrightarrow x = \pm \operatorname{arch} a \equiv \pm \ln \left(a + \sqrt{a^2 - 1} \right).$$

Гиперболические тангенс и котангенс принимают все свои значения не более одного раза. Для них на их областях значений заданы обратные функции, называемые соответственно ареа-тангенсом (arth) и ареа-котангенсом (arcth). И их легко выразить через логарифм. Таким образом, если $|a| < 1$, то имеет место следующая равносильность:

$$\operatorname{th} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arth} a \equiv \ln \sqrt{\frac{1+a}{1-a}},$$

тогда как при других a уравнение неразрешимо. Что касается уравнения с гиперболическим котангенсом, то при $|a| > 1$ имеет место следующая равносильность:

$$\operatorname{cth} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcth} a \equiv \ln \sqrt{\frac{a+1}{a-1}},$$

тогда как при других a уравнение неразрешимо.

Поясним происхождение названий гиперболических и обратных гиперболических функций.

Тригонометрическую окружность единичного радиуса можно параметризовать следующим образом: $x = \cos t$, $y = \sin t$, т. е. углу t соответствует точка окружности $(x; y)$. Но параметр t можно понимать не только как угол, но и как дугу окружности (поэтому обратные тригонометрические функции называются аркфункциями — от латинского слова «дуга»), и как площадь соответствующего сектора круга (с точностью до постоянного множителя 1/2). Аналогичные рассуждения применимы к гиперболе.

Area на латинском языке значит площадь. Покажем, какая площадь имеется в виду, если речь идет о гиперболических функциях. Ветвь гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, находящуюся в правой полуплоскости, можно параметризовать следующим образом: $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$. Обозначим $O = (0; 0)$, $A = (1; 0)$, $B = (x; y) = (\operatorname{ch} t; \operatorname{sh} t)$, $C = (x; 0)$. Площадь треугольника OCB равна $xy/2 = \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t/2$. Можно показать, что площадь криволинейного треугольника ABC равна $(\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t)/2$. Поэтому площадь криволинейного треугольника, образованного началом координат, точкой $(1; 0)$ и точкой гиперболы $(x; y)$ определяется параметром t (с точностью до постоянного множителя 1/2). С другой стороны, t можно выразить через x или y с помощью обратных гиперболических функций, которые и называются ареафункциями в силу этих выражений для площади.

1.3 Формулы

Напомним основное тригонометрическое тождество, получаемое из геометрических соображений и верное при всех действительных x:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Если поделить его на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$, то получим соответственно следующие равенства:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

или

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Они верны там, где $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$ или $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi n,\ n \in Z$ соответственно.

Сразу начнем проводить аналогии с гиперболическими функциями. Основное гиперболическое тождество выглядит следующим образом:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Оно вытекает непосредственно из определений гиперболических функций и верно при всех действительных значениях аргумента. Если поделить его на $\operatorname{ch}^2 x$ ($x \in R$) или $\operatorname{sh}^2 x$ ($x \neq 0$), то получим соответственно следующие равенства:

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

или

$$\operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Кроме того, верны следующие формулы:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \tag{4}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}. \tag{6}$$

Не будем останавливаться на их выводе. Отметим, что формулы (4) и (5) верны при всех действительных x и y, а (6) — там, где тангенсы определены, а знаменатель не обращается в ноль. При использовании (6) надо быть особенно внимательными, поскольку ее использование не является равносильным переходом. Например, если $x = \pi/2$, $y = \pi/4$, то левая часть определена, а правая — нет.

Аналогичные гиперболические формулы имеют следующий вид:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{7}$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{8}$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}. \tag{9}$$

Формулы (7) и (8) можно вывести непосредственно из определений гиперболических функций. Если поделить (7) на (8), а затем в правой части поделить числитель и знаменатель на $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$, то получим (9). Эти гиперболические формулы (включая (9)) верны при всех действительных значениях аргументов.

Если в формулах для функций от $x + y$ полагать y равным x, $2x$ и т. д., то получим следующие формулы кратных аргументов:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x, \tag{11}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x},$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

$$\operatorname{sh} 3x = 4\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch} 3x = 4\operatorname{ch}^3 x - 3\operatorname{ch} x.$$

Поясним, что разные варианты формул (10) и (11) можно получить с помощью основного тригонометрического и основного гиперболического тождества соответственно.

Из формул двойного аргумента легко получить следующие выражения:

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2},\ 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}, \tag{12}$$

$$\operatorname{ch} x + 1 = 2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2},\ \operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},\ \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x},$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x},$$

$$\operatorname{th}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1},\ \operatorname{cth}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}.$$

Если рассмотреть варианты формул (4), (5), (7) и (8) «с плюсами» и «с минусами», то складывая и вычитая соответствующие варианты, получим формулы преобразования произведений в суммы:

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2},$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2},$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2},$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{sh}(x - y) + \operatorname{sh}(x + y)}{2},$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)}{2},$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)}{2}.$$

Если же в предыдущих шести формулах принять $x + y$ и $x - y$ за новые переменные, то получим формулы преобразования сумм и разностей в произведения:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}.$$

Формулы сложения тангенсов и котангенсов выглядят следующим образом:

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y},$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y},$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y},$$

$$\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y = \frac{\operatorname{sh}(y \pm x)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y},$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} y = \pm \frac{\cos(x \mp y)}{\cos x \sin y},$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{cth} y = \pm \frac{\operatorname{ch}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}.$$

В справедливости этих формул можно убедиться, представляя левые части через синусы и косинусы. Отметим, что их применение является равносильным переходом, т. е. их левые и правые части имеют одинаковые области определения.

Приведем еще две специальные формулы сложения:

$$\cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x \mp \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}.$$

Первую можно получить, принимая во внимание, что $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, а вторую — из определений гиперболических функций.

В определениях тригонометрических и гиперболических функций нет ничего похожего, однако они имеют так много похожих свойств. Как же это объяснить? Уместно вспомнить слова О. Хайяма:

Все, что видим мы, видимость только одна.
Далеко от поверхности мира до дна.
Полагай несущественным явное в мире,
Ибо тайная сущность вещей не видна.

Здесь «тайную сущность вещей» откроет теория функций комплексной переменной. В ней предлагается способ распространения этих функций на любые комплексные значения аргументов, основанный на степенных рядах:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{14}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{15}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}. \tag{16}$$

Можно показать, что эти ряды сходятся абсолютно при всех комплексных z. Если же сложить ряд (16) и ряд (15), умноженный на $i = \sqrt{-1}$, то получим то же, что если в (14) вместо z подставить iz. Таким образом, приходим к формуле Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \ \forall z \in C.$$

Из нее легко получить следующие выражения:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{ch}(iz),$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i \operatorname{sh}(iz).$$

Кроме того, из формулы Эйлера следует формула Муавра:

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz \ \forall n \in N.$$

Отсюда непосредственно следует, что формулы для косинуса и синуса n-кратных аргументов можно получить соответственно как действительную и мнимую части левой части формулы Муавра.

Формула для гиперболических функций, аналогичная формуле Муавра, имеет следующий вид:

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx.$$

2 Задачи на преобразование выражений

Задача 1. *Сравнить числа* $\sin 7$ *и* $\cos 8$.

Заметим, что $3 < \pi < 3,2$. Следовательно, во-первых, $2\pi < 6,4 < 7 < 7,5 < 2,5\pi$, во-вторых, $2,5\pi < 8 < 9 < 3\pi$. Значит, 7 — угол первой четверти, где синус положителен, а 8 — угол второй четверти, где косинус отрицателен. Поэтому $\cos 8 < 0 < \sin 7$.

Ответ: $\cos 8 < \sin 7$.

Задача 2. *Найти* $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Из основного тригонометрического тождества видно, что $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ с точностью до знака. Как же выбрать знак? Заметим, что арккосинус принимает значения из промежутка $[0;\ \pi]$, где синус неотрицателен. Поэтому

$$\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = +\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{2}{3}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Задача 3. *Найти* $\arcsin(\sin 5)$.

Заметим, что $\arcsin(\sin x) = x$ для всех x из области значений арксинуса, т. е. промежутка $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Сведем аргумент из условия к аргументу из этого промежутка с помощью формулы приведения. Легко проверить, что $1,5\pi < 5 < 2\pi$. Значит, $5-2\pi$ — такое число из названного множества, что его синус равен синусу пяти. Следовательно,

$$\arcsin(\sin 5) = \arcsin(\sin((5-2\pi)+2\pi)) = \arcsin(\sin(5-2\pi)) = 5-2\pi.$$

Ответ: $5-2\pi$.

Задача 4. *Проверить тождество*

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \sin 2x.$$

Формально преобразуем левую часть:

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\frac{\sin x}{\cos x\cos 2x}} = \sin 2x.$$

Однако, такой переход будет верным, если только все выражения определены, т. е. $\cos x\cos 2x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$. Заметим, что одновременное выполнение этих неравенств эквивалентно неравенству $\sin x\cos x\cos 2x \neq 0$, т. е. $\sin 4x \neq 0$. Отсюда легко найдем, что $x \neq \pi n/4$, $n \in Z$. Значит, тождество верно для всех действительных x, кроме тех, которые имеют вид $\pi n/4$, $n \in Z$.

Задача 5. *Проверить тождество*

$$\frac{\operatorname{th} x \operatorname{th} 2x}{\operatorname{th} 2x - \operatorname{th} x} = \operatorname{sh} 2x.$$

Решение аналогично решению предыдущей задачи. Формальным преобразованием левой части легко получим выражение из правой части. Однако, левая и правая части имеют разные области определения. Правая часть определена при всех действительных x, а левая — если

$$\operatorname{th} 2x - \operatorname{th} x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} x} \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Значит, тождество верно для всех действительных x, кроме нуля.

Задача 6. *Доказать, что*

$$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

для всех $\alpha \in (\pi; 1,5\pi) \cup (1,5\pi; 2\pi)$.

Обозначим через x левую часть равенства. Преобразуем ее с помощью формул (12):

$$x = \frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + \sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\sqrt{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| - \sqrt{2}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Заметим, что при всех α из условия $(\alpha/2) \in (\pi/2; \pi)$, где синус положителен, а косинус отрицателен. Поэтому можно раскрыть модули следующим образом:

$$x = \frac{\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Теперь упростим числитель и знаменатель с помощью «дополнительного аргумента»:

$$x = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

что требовалось доказать. Отметим, что преобразования были равносильны для всех α из условия.

Задача 7. *Доказать, что*

$$\frac{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + 1} + \sqrt{\operatorname{ch}\alpha - 1}}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + 1} + \sqrt{\operatorname{ch}\alpha - 1}} = e^{|\alpha|}$$

для всех $\alpha \in R$.

Обозначим через x левую часть равенства. Преобразуем ее с помощью формул (13):

$$x = \frac{\sqrt{2}\left|\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\right| + \sqrt{2}\left|\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\right|}{\sqrt{2}\left|\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\right| - \sqrt{2}\left|\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Для раскрытия модулей рассмотрим два случая.

- Если $\alpha \geqslant 0$, то
$$x = \frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}} = \frac{e^{\alpha/2}}{e^{-\alpha/2}} = e^{\alpha}.$$
- Если $\alpha < 0$, то
$$x = \frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}} = \frac{e^{-\alpha/2}}{e^{\alpha/2}} = e^{-\alpha}.$$

Результаты преобразования в двух случаях можно объединить:

$$x = e^{|\alpha|},$$

что требовалось доказать.

Задача 8. *Проверить тождество*

$$\frac{\sqrt{\operatorname{cth}\alpha} + \sqrt{\operatorname{th}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{cth}\alpha} - \sqrt{\operatorname{th}\alpha}} = e^{2\alpha}.$$

Если $\alpha < 0$, то под корнями будут отрицательные числа. Если $\alpha = 0$, то гиперболический котангенс не определен. Знаменатель нигде не обратится в ноль. Если же $\alpha > 0$, то следующие преобразования будут равносильными:

$$\sqrt{\operatorname{cth}\alpha} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{sh}\alpha}},$$

верно и аналогичное представление для выражения с тангенсом. Поэтому числитель дроби из условия можно равносильно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{\operatorname{cth}\alpha} + \sqrt{\operatorname{th}\alpha} = \frac{\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha}{\sqrt{\operatorname{sh}\alpha}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}.$$

Аналогично преобразуем знаменатель и сократим дробь. Значит, левая часть равна

$$\frac{\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{sh}\alpha} = \frac{e^{\alpha}}{e^{-\alpha}} = e^{2\alpha}.$$

Подчеркнем, что при положительных α все преобразования были равносильны.

Ответ: верно при $\alpha > 0$.

Задача 9. *Проверить тождество*

$$\frac{3 - 4\operatorname{ch}2\alpha + \operatorname{ch}4\alpha}{3 + 4\operatorname{ch}2\alpha + \operatorname{ch}4\alpha} = th^4\alpha.$$

Заметим, что левая и правая части определены при всех действительных α (знаменатель дроби всегда не меньше 8). Преобразуем числитель и знаменатель с помощью формул (13) и формул преобразования сумм в произведения. Во-первых,

$$3-4\operatorname{ch}2\alpha+\operatorname{ch}4\alpha = 3(1-\operatorname{ch}2\alpha)+(\operatorname{ch}4\alpha-\operatorname{ch}2\alpha) = -6\operatorname{sh}^2\alpha+2\operatorname{sh}3\alpha\operatorname{sh}\alpha = 2\operatorname{sh}\alpha(\operatorname{sh}3\alpha-3\operatorname{sh}\alpha),$$

во-вторых,

$$3+4\operatorname{ch}2\alpha+\operatorname{ch}4\alpha = 3(1+\operatorname{ch}2\alpha)+(\operatorname{ch}4\alpha+\operatorname{ch}2\alpha) = 6\operatorname{ch}^2\alpha+2\operatorname{ch}3\alpha\operatorname{ch}\alpha = 2\operatorname{ch}\alpha(\operatorname{ch}3\alpha+3\operatorname{ch}\alpha).$$

Поэтому вся дробь равна

$$\operatorname{th}\alpha \cdot \frac{4\operatorname{sh}^3\alpha + 3\operatorname{sh}\alpha - 3\operatorname{sh}\alpha}{4\operatorname{ch}^3\alpha - 3\operatorname{ch}\alpha + 3\operatorname{ch}\alpha} = \operatorname{th}\alpha \cdot \frac{\operatorname{sh}^3\alpha}{\operatorname{ch}^3\alpha} = \operatorname{th}^4\alpha.$$

Все преобразования были равносильны.

Ответ: верно при всех $\alpha \in R$.

3 Тригонометрические и гиперболические уравнения

Задача 1. *Решить уравнение*

$$3 \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x} = \cos 2x.$$

Область допустимых значений состоит из тех x, при которых тангенс определен и не равен 1, т. е. $x \in R \setminus \{\pi/2 + \pi n,\ \pi/4 + \pi k,\ n, k \in Z\}$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\cos x$ (это является неравносильным переходом, поскольку могут быть приобретены корни, обращающие косинус в ноль). Правую часть преобразуем по формуле косинуса двойного угла, а затем разложим на множители. Таким образом,

$$3 \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x).$$

Правая и левая части имеют общий множитель. Значит, уравнение можно переписать в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{r} \cos x + \sin x = 0, \\ \frac{3}{\cos x - \sin x} = \cos x - \sin x. \end{array}\right.$$

В первом уравнении совокупности легко перейти к тангенсу, поскольку косинус не равен нулю: $\operatorname{tg} x = -1$, откуда $x = -\pi/4 + \pi n,\ n \in Z$. Это множество входит в область допустимых значений.

Второе равносильно уравнению

$$(\cos x - \sin x)^2 = 3.$$

Если раскрыть скобки и применить формулу синуса двойного аргумента, то получим, что $\sin 2x = -2$, что невозможно.

Ответ: $x = -\pi/4 + \pi n,\ n \in Z$.

Задача 2. *Решить уравнение*

$$3 \cdot \frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x} = \operatorname{ch} 2x.$$

Здесь допустимыми являются все $x \in R$, поскольку гиперболический тангенс везде определен и нигде не равен единице. Умножим числитель и знаменатель дроби на гиперболический косинус, что является равносильным переходом, поскольку он везде положителен. Затем воспользуемся соотношением $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}$. Получим, что левая часть равна $3e^{2x}$. Правую часть преобразуем по определению гиперболического косинуса. Введем переменную $y = e^{2x} > 0$. Уравнение примет вид

$$3y = \frac{y + 1/y}{2}.$$

Из него легко получить, что

$$y = +\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(отрицательный корень нас не интересует, поскольку за y приняли экспоненту). Следовательно,

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\ln 5}{4}.$$

Ответ: $x = -\frac{\ln 5}{4}$.

Задача 3. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 3 \operatorname{ctg} 3x + 4 \operatorname{ctg} 4x = 0.$$

Область допустимых значений состоит из тех x, при которых все тангенсы и котангенсы определены, т. е. $x \in R \backslash \{\pi/2 + \pi n_1,\ \pi/4 + \pi n_2/2,\ \pi n_3/3,\ \pi n_4/4,\ n_{1,2,3,4} \in Z\}$.

Перепишем уравнение следующим образом:

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 3x) + 2(\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 4x) + 2 \operatorname{ctg} 3x + 2 \operatorname{ctg} 4x = 0.$$

К выражениям в скобках применим формулу преобразования суммы в одночлен:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x \sin 3x} + 2\frac{\cos 2x}{\cos 2x \sin 4x} + 2\frac{\cos 3x}{\sin 3x} + 2\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = 0.$$

Приведем к общему знаменателю, во-первых, первое и третье слагаемые, во-вторых, второе и четвертое:

$$\frac{\cos 2x + 2\cos x\cos 3x}{\sin 3x\cos x} + \frac{2(1+\cos 4x)}{\sin 4x} = 0.$$

Числитель первой дроби легко привести к виду $2\cos 2x + \cos 4x$. Преобразуем вторую дробь:

$$\frac{2(1+\cos 4x)}{\sin 4x} = \frac{4\cos^2 2x}{2\sin 2x\cos 2x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}.$$

Теперь приведем всю левую часть уравнения к общему знаменателю и отбросим знаменатель, не забывая про область допустимых значений:

$$\sin 2x(2\cos 2x + \cos 4x) + 2\sin 3x\cos x\cos 2x = 0.$$

В первом слагаемом раскроем скобки, а во втором преобразуем произведение в сумму:

$$2\sin 2x\cos 2x + \sin 2x\cos 4x + \sin 2x\cos 2x + \sin 4x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 3\sin 2x\cos 2x + \sin 6x = 0.$$

В свою очередь, это уравнение равносильно следующему:

$$3\sin 2x\cos 2x + 3\sin 2x - 4\sin^3 2x = 0.$$

На $\sin 2x$ его можно сократить (действительно, если $\sin 2x = 0$, то и $\sin 4x = 0$, а один из котангенсов в условии не определен). Теперь уравнение легко свести к квадратному относительно $\cos 2x$. Из него найдем, что $\cos 2x = -1$ или $\cos 2x = 1/4$. Если $\cos 2x = -1$, то $\sin 2x = 0$, что не соответсвует области допустимых значений. Из второго простейшего уравнения легко найти ответ.

Ответ: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Задача 4. *Решить уравнение*

$$\sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x.$$

Область допустимых значений состоит из тех x, при которых тангенс определен, т. е. $x \in R \setminus \{\pi/2 + \pi n,\ n \in Z\}$.

Умножим уравнение на $\cos x$, что является неравноситьным переходом (можно приобрести корни, обращающие косинус в ноль):

$$\sin^2 x = \cos^2 x + \sin x.$$

Положим $s = \sin x$. Тогда

$$s^2 = 1 - s^2 + s \Leftrightarrow 2s^2 - s - 1 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения получим, что $s = 1$ или $s = -1/2$. Возвращаясь к переменной x, получим соответственно $x = \pi/2 + 2\pi k$ ($k \in Z$) или $x = (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n$ ($n \in Z$). Однако, первое множество не входит в область допустимых значений: оно появилось при неравносильном переходе.

Ответ: $x = (-1)^{n+1}\pi/6 + \pi n,\ n \in Z$.

Задача 5. *Решить уравнение*

$$\operatorname{sh} x \operatorname{th} x = \operatorname{ch} x + \operatorname{th} x.$$

Рассуждения аналогичны решению предыдущего уравнения, однако здесь областью допустимых значений будут все $x \in R$, а умножение на гиперболический косинус будет равносильным переходом. Таким образом,

$$\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x \Leftrightarrow \operatorname{sh} x = -1 \Leftrightarrow x = -\operatorname{arsh} 1.$$

Поскольку все переходы были равносильными, проверки не требуется.

Ответ: $x = -\operatorname{arsh} 1$.

Задача 6. *Решить уравнение*

$$(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$$

Область допустимых значений состоит из тех x, при которых тангенс определен, т. е. $x \in R \setminus \{\pi/2 + \pi n,\ n \in Z\}$.

Умножим уравнение на $\cos x$ (напомним, что это является неравноситьным переходом). Второй множитель в левой части преобразуем следующим образом:

$$1 + \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2.$$

Таким образом, уравнение примет следующий вид:

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x.$$

В левой и правой частях есть общий множитель, поэтому можно перейти к совокупности:

$$\left[\begin{array}{r} \cos x + \sin x = 0, \\ (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение уже встречалось в задаче 1, из него найдем $x = -\pi/4 + \pi n,\ n \in Z$. Во втором раскроем скобки и применим формулу косинуса двойного угла. Таким образом, $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in Z$. Оба полученных множества соответствуют области допустимых значений.

Ответ: $x = -\pi/4 + \pi n,\ n \in Z,\ x = \pi k,\ k \in Z$.

Задача 7. *Решить уравнение*

$$(1 - \operatorname{th} x)(1 + \operatorname{sh} 2x) = 1 + \operatorname{th} x.$$

Рассуждения аналогичны решению предыдущего уравнения, однако здесь областью допустимых значений будут все $x \in R$, а умножение на гиперболический косинус будет равносильным переходом. Таким образом,

$$(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(1 + \operatorname{sh} 2x) = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \Leftrightarrow e^{-x}(1 + \operatorname{sh} 2x) = e^x \Leftrightarrow 1 + \operatorname{sh} 2x = e^{2x},$$

поскольку $\operatorname{ch} \varphi \pm \operatorname{sh} \varphi = e^{\pm\varphi}$. Еще раз воспользовавшись этим соотношением, получим:

$$1 + \operatorname{sh} 2x = \operatorname{ch} 2x + \operatorname{sh} 2x \Leftrightarrow \operatorname{ch} 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

4 Задачи с параметрами

Задача 1. *При каких* $a \in (-\pi/2;\ \pi/2)$ *имеет решение уравнение*

$$\sqrt{2\sin(x-a)+\sqrt{3}} = \cos 6x - 1?$$

Заметим, что арифметический квадратный корень неотрицателен по определению, а правая часть неположительна в силу ограниченности косинуса. Поэтому уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\sin(x-a)+\sqrt{3}=0, \\ \cos 6x - 1 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения легко найти, что $6x = 2\pi n,\ n \in Z$, т. е. $x = \pi n/3$. Решения первого запишем в виде совокупности, а не через привычную формулу с $(-1)^n$:

$$\left[\begin{array}{l} x = a - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = a + \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \ \in Z. \end{array} \right.$$

Подставим сюда найденное раньше выражение для x и поделим на $\pi/3$:

$$\left[\begin{array}{l} n = \frac{3a}{\pi} - 1 + 6k, \\ n = \frac{3a}{\pi} + 4 + 6k. \end{array} \right.$$

Значит, можно переформулировать задачу так: при каких a существуют такие n и k, что эта совокупность непротиворечива? Легко заметить, что если число $3a/\pi$ будет целым, то такие n и k найдутся, в противном случае — нет. С учетом интервала, фигурирующего в условии, получим, что это число может быть равно только 0, 1 или -1. Значит, $a \in \{0;\ \pm\pi/3\}$.

Проверкой можно убедиться, что при таких a уравнение разрешимо.

Ответ: $a \in \{0;\ \pm\pi/3\}$.

Задача 2. *При каких* a *уравнение.*

$$\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\sin 3x + \frac{a}{2} = 0$$

имеет ровно три корня на промежутке $[2\pi/3;\ \pi]$.

Несложно убедиться, что уравнение является квадратным относительно $\sin 3x$ и имеет корни a и $1/2$. Введем переменную $y = 3x$, находящуюся в промежутке $[2\pi;\ 3\pi]$, и переформулируем задачу: при каких a совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \sin y = a, \\ \sin y = \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

имеет ровно три корня на промежутке $[2\pi;\ 3\pi]$? Заметим, что множество решений второго уравнения имеет вид $y = (-1)^n\pi/6 + \pi n,\ n \in Z$. На указанный промежуток попадает два корня: $2\pi + \pi/6$ и $3\pi - \pi/6$. Значит, надо найти a, при которых первое уравнение совокупности имеет ровно один корень на том же промежутке. Если оно разрешимо, то имеет на этом множестве два корня: $y = 2\pi + \arcsin a$ и $y = 3\pi - \arcsin a$. Они совпадут, если $a = 1$ — тогда $y = 2,5\pi$.

Ответ: $a = 1$.

Задача 3. *Решить уравнение*

$$\left(8a^2+1\right)\sin^3 x-\left(4a^2+1\right)\sin x+2a\cos^3 x=0.$$

В уравнение входят первая и третья степени тригонометрических функций. Однако, его можно сделать однородным, т. е. таким, во всех одночленах которого суммы степеней синуса и косинуса равны. Действительно, если воспользоваться тем, что

$$\sin x=\sin x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right),$$

то можно привести уравнение к виду

$$4a^2\sin^3 x-\left(4a^2+1\right)\sin x\cos^2 x+2a\cos^3 x=0.$$

Хотелось бы поделить на $\cos^3 x$ и принять $\operatorname{tg} x$ за новую переменную: тогда уравнение станет алгебраическим. Корректно ли это? Т. е. не будут ли потеряны корни, которые обращают косинус в ноль? Подставим в уравнение $\cos x=0$:

$$4a^2\sin^3 x=0.$$

Если $a\neq 0$, то из уравнения следует, что $\sin x=0$, что противоречит тому, что $\cos x=0$, т. е. при $a\neq 0$ те x, которые обращают косинус в ноль, не будут решениями, а значит, переход к тангенсу будет равносильным. Если же $a=0$, то такой вывод сделать нельзя, и этот особый случай надо рассмотреть отдельно.

Пусть $a=0$. В этом случае уравнение имеет вид

$$\sin x\cos^2 x=0\Leftrightarrow \sin x\cos x=0\Leftrightarrow \sin 2x=0.$$

Отсюда получим $x=\pi n/2,\ n\in Z$.

Пусть теперь $a\neq 0$. Как уже говорилось, в этом случае переход к тангенсу будет равносильным. Поэтому уравнение можно переписать в виде

$$4a^2y^3-\left(4a^2+1\right)y+2a=0\Leftrightarrow 4a^2y^3-y=4a^2y-2a,$$

где $y=\operatorname{tg} x$. Разложим левую и правую части на множители:

$$y\left(2ay-1\right)\left(2ay+1\right)=2a\left(2ay-1\right).$$

Перейдем к совокупности:

$$\left[\begin{array}{r}2ay-1=0,\\ 2ay^2+y=2a.\end{array}\right.$$

Из первого уравнения найдем $y=(2a)^{-1}$, откуда $x=\operatorname{arctg}(2a)^{-1}+\pi m,\ m\in Z$. Второе всегда имеет два различных корня y, по которым найдем и x:

$$x=\operatorname{arctg}\frac{-1\pm\sqrt{1+16a^2}}{4a}+\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ. Если $a=0$, то $x=\pi n/2,\ n\in Z$, иначе:

$$\left[\begin{array}{r}x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2a}+\pi m,\ m\in Z,\\ x=\operatorname{arctg}\frac{-1\pm\sqrt{1+16a^2}}{4a}+\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Задача 4. *Решить уравнение*

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x + \left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x = 2a$$

при $a \geqslant 1$.

Так как $a \geqslant 1$, то существует такое $\alpha \geqslant 0$, что $a = \operatorname{ch}\alpha$. Тогда

$$\sqrt{a^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha - 1} = |\operatorname{sh}\alpha| = +\operatorname{sh}\alpha.$$

Поэтому первое слагаемое уравнения можно преобразовать так:

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x = \left(\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha}\right)^x = (e^\alpha)^{x/2} = e^{\alpha x/2}.$$

Аналогично второе можно привести к виду $e^{-\alpha x/2}$. Таким образом, уравнение принимает вид

$$2\operatorname{ch}\frac{\alpha x}{2} = 2\operatorname{ch}\alpha \Leftrightarrow \operatorname{ch}\frac{\alpha x}{2} - \operatorname{ch}\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sh}\frac{\alpha x + 2\alpha}{4}\operatorname{sh}\frac{\alpha x - 2\alpha}{4} = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{sh}\frac{\alpha x+2\alpha}{4} = 0, \\ \operatorname{sh}\frac{\alpha x-2\alpha}{4} = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha(x+2) = 0, \\ \alpha(x-2) = 0. \end{array}\right.$$

Значит, если $\alpha = 0$ (т. е. $a = \operatorname{ch} 0 = 1$), то совокупности удовлетворяет любое действительное значение x, иначе — $x = 2$ или $x = -2$.

Ответ: если $a = 1$, *то* $x \in R$, *если* $a > 1$, *то* $x = \pm 2$.

5 Задачи на замены

Задача 1. *Решить уравнение*

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x.$$

Заметим, что все решения уравнения находятся на промежутке $[-1;\ 1]$: в противном случае корень не определен. Поэтому существует такое $\varphi \in [0;\ \pi]$, что $x = \cos\varphi$. Подчеркнем, что в подобных задачах на замены при переходе к новой переменной по правилу $x = f(\varphi)$ следует брать φ не из всей области определения $f(\cdot)$, а из наиболее узкого множества, где эта функция принимает все свои значения. Это позволяет упростить вычисления. На примере данного уравнения видно, что если взять $\varphi \in [0;\ \pi]$, то левая часть упростится однозначно:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = |\sin\varphi| = +\sin\varphi.$$

Если же брать φ не из этого отрезка, а из всего множества R, то пришлось бы разбирать разные случаи при раскрытии модуля.

Что касается правой части уравнения, то она равна $\cos 3\varphi$. Таким образом, уравнение принимает вид

$$\sin\varphi = \cos 3\varphi \Leftrightarrow \cos 3\varphi - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 0 \Leftrightarrow -2\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Легко убедиться, что на выбранном промежутке это уравнение имеет три корня: $\varphi = 3\pi/4$, $\varphi = \pi/8$ и $\varphi = 5\pi/8$, откуда $x = -1/\sqrt{2}$ и $x = \pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}/2$. Поясним, что косинусы $\pi/8$ и $5\pi/8$ можно получить из косинусов $\pi/4$ и $5\pi/4$ с помощью формул (12).

Ответ: $x = -1/\sqrt{2}$ *и* $x = \pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}/2$ *(всего три корня, т. е. знаки во втором выражении согласованы.*

Задача 2. *Решить уравнение*

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = \sqrt{2}\left(2x^2-1\right).$$

И в этой задаче все корни находятся в промежутке $[-1;\ 1]$, а значит, можно положить $x = \cos\varphi$, $\varphi \in [0;\ \pi]$. Тогда левую часть можно упростить с помощью формул (12):

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = \sqrt{1+\cos\varphi}+\sqrt{1-\cos\varphi} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

(подчеркнем, что модули раскрываются однозначно, поскольку $\varphi \in [0;\ \pi]$). Правую часть упростим по формуле двойного аргумента. Сократив на $\sqrt{2}$, перепишем уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\varphi.$$

Так как $\varphi \in [0;\ \pi]$, то $-\pi/4 \leqslant \varphi/2-\pi/4 \leqslant \pi/4$. Поэтому левая часть уравнения принимает значения из множества $[1;\ \sqrt{2}]$. С другой стороны, правая часть не больше единицы. Поэтому уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \cos 2\varphi = 1. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет на множестве $[0;\ \pi]$ два корня: 0 и π. Проверкой можно убедиться, что они удовлетворяют и первому. Соответствующие значения x равны 1 и -1.

Ответ: $x = \pm 1$.

Задача 3. *Решить уравнение*

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2 = 1.$$

Заметим, что все решения уравнения находятся на множестве $[-1;\ 1]$: в противном случае «внутренний» корень не определен. Подчеркнем, что эти соображения не являются полным поиском области допустимых значений, но их достаточно, чтобы утверждать, что сущесвтует такое $\varphi \in [-\pi/2;\ \pi/2]$, что $x = \sin\varphi$. Тогда «внешний» корень можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{\frac{1+2\sin\varphi\sqrt{1-\sin^2\varphi^2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+2\sin\varphi\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin 2\varphi}{2}}.$$

Напомним, что φ выбирается из такого множества, что при упрощении «внутреннего» корня модуль раскрывается однозначно. Дальше можно преобразовать подкоренное выражение к полному квадрату и получить уравнение с модулем, но мы поступим иначе. Как известно, уравнение

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ \quad g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

(действительно, если $g(x) < 0$, то уравнение будет противоречиво, а если обе части неотрицательны, то возведение в квадрат будет равносильным переходом, причем неотрицательность $f(x)$ будет следовать из полученного уравнения). В данном случае равносильная система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1+\sin 2\varphi}{2} = \cos^2 2\varphi, \\ \quad \cos 2\varphi \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение легко свести к квадратному относительно $\sin 2\varphi$; из него получим, что $\sin 2\varphi = -1$ или $\sin 2\varphi = 1/2$. Решая эти уравнения на множестве $[-\pi/2;\ \pi/2]$, получим два значения: $\varphi = -\pi/4$ и $\varphi = \pi/12$. Оба значения удовлетворяют неравенству $\cos 2\varphi \geqslant 0$. Значит, уравнение имеет два корня. Первый, очевидно, равен $-1/\sqrt{2}$, а второй можно вычислить так:

$$x = \sin 15^\circ = \sin(45-30)^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $x = -1/\sqrt{2}$ *или* $x = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/4$.

Задача 4. *Решить уравнение*

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}.$$

Заметим, что $x > 1$ (в противном случае левая часть не определена или отрицательна). Поэтому существует такое $\varphi \in (0;\ \pi/2)$, что $x = 1/\cos\varphi$. Уравнение легко привести к виду

$$\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{35}{12},$$

откуда

$$\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi\sin\varphi} = \frac{35}{12}.$$

Положим $y = \sin\varphi + \cos\varphi$. Тогда $y^2 = 1 + 2\sin\varphi\cos\varphi$. Уравнение легко сведется к квадратному; из него найдем $y = 7/5$ (другой корень отрицателен, что противоречит тому, что синус и косинус положительны при $\varphi \in (0;\ \pi/2)$). Таким образом,

$$\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{5}.$$

Отсюда легко найти, что

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

Вернемся к переменной x, воспользовавшись тем, что $\sin(\arccos a) = +\sqrt{1-a^2}$:

$$x = \cos\varphi = \cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}\right) \mp \sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}\right).$$

После упрощений получим: $x = 5/3$ или $x = 5/4$.

Ответ: $x = 5/3$ *или* $x = 5/4$.

Задача 5. *Решить уравнение*

$$\sqrt{1+\log_2 x} + \sqrt{4\log_4 x - 2} = 4.$$

Заметим, что уравнение равносильно следующему:

$$\sqrt{1+\log_2 x} + \sqrt{2\left(\log_2 x - 1\right)} = 4.$$

Область допустимых значений состоит из таких x, что логарифм больше или равен единице (и определен). Значит, можно перейти к переменной $\varphi \geqslant 0$ по правилу $\log_2 x = \operatorname{ch}\varphi$. Поэтому, учитывая формулы (13), сделаем следующий равносильный переход:

$$\sqrt{1+\operatorname{ch}\varphi} + \sqrt{2\left(\operatorname{ch}\varphi - 1\right)} = 4 \Leftrightarrow \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} + \sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2} = 2\sqrt{2}.$$

К гиперболическим выражениям применимо преобразование, аналогичное методу дополнительного аргумента: если $a > b > 0$, то

$$a\operatorname{sh}\psi + b\operatorname{ch}\psi = \sqrt{a^2-b^2}\left(\operatorname{sh}\psi\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\psi\operatorname{sh}\alpha\right),$$

где α — такое число, что его гиперболические косинус и синус равны соответственно $a/\sqrt{a^2-b^2}$ и $b/\sqrt{a^2-b^2}$. Следовательно, уравнение можно привести к виду

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right) = 2\sqrt{2},\ \ \alpha = \operatorname{arsh}1,$$

откуда

$$\varphi = 2\left(\operatorname{arsh}\left(2\sqrt{2}\right) - \alpha\right).$$

Гиперболический косинус этого выражения можно найти с помощью формул косинуса двойного аргумента и косинуса разности, учитывая, что $\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}a) = +\sqrt{1+a^2}$. После упрощений получим:

$$\operatorname{ch}\varphi = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8.$$

Ответ: $x = 8$.

Задача 6. *Решить уравнение*

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{15}{8}\sqrt[3]{\frac{x}{15}}.$$

Здесь область допустимых значений составляют $x \in [-1;\ 1]$. Проверкой можно убедиться, что $x = \pm 1$ — не решения. Значит, $x \in (-1;\ 1)$, и можно положить $x = \operatorname{th}\varphi$, $\varphi \in R$.

Преобразуем левую часть, умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{\operatorname{ch}\varphi}$, а затем внося косинус под корни (это будет равносильным переходом, поскольку $\operatorname{ch}\varphi > 0$):

$$\frac{\sqrt{1+\operatorname{th}\varphi}-\sqrt{1-\operatorname{th}\varphi}}{\sqrt{1+\operatorname{th}\varphi}+\sqrt{1-\operatorname{th}\varphi}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi}-\sqrt{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{sh}\varphi}}{\sqrt{\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi}+\sqrt{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{sh}\varphi}} = \frac{\sqrt{e^{\varphi}}-\sqrt{e^{\varphi}}}{\sqrt{e^{\varphi}}+\sqrt{e^{\varphi}}} = \operatorname{th}\frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом,
$$\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}=\frac{15}{8}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{th}\varphi}{15}}.$$
Введем переменную $y=\operatorname{th}(\varphi/2)$. Тогда $\operatorname{th}\varphi=2y/\left(1+y^2\right)$, и уравнение легко привести к следующему виду:
$$y^3=\frac{15^2}{8^2\cdot 4}\frac{y}{1+y^2}.$$
Числитель и знаменатель дроби мы не вычисляем, поскольку, как будет видно, неупрощенный вид уравнения облегчит вычисления.

Заметим, что $y=0$ удовлетворяет уравнению. Следовательно, $\varphi=0$, откуда $x=0$.

Теперь найдем ненулевые решения. Уравнение легко привести к виду
$$16^2y^4+16^2y^2-225=0.$$
Таким образом, оно стало квадратным относительно $16y^2$. Положительный корень этого уравнения легко вычислить:
$$16y^2=9$$
(другой корень будет отрицательным), откуда $y=\pm 3/4$. Подставив эти значения в формулу тангенса двойного аргумента, получим, что $x=\pm 24/25$.

Ответ: $x=0$ *или* $x=\pm 24/25$.

Задача 7. *Решить уравнение*
$$2x+1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=0.$$
Решим задачу двумя способами.

1 способ.

Введем две вспомогательные переменные: $x=\operatorname{sh}\varphi$, $\varphi\in R$, $x+1=\operatorname{sh}\psi$, $\psi\in R$. Тогда первую и вторую дроби уравнения легко привести к виду $\operatorname{th}\varphi$ и $\operatorname{th}\psi$ соответственно. Значит, уравнение равносильно системе:
$$\left\{\begin{aligned}\operatorname{sh}\varphi+\operatorname{sh}\psi+\operatorname{th}\varphi+\operatorname{th}\psi&=0,\\ \operatorname{sh}\psi-\operatorname{sh}\varphi&=1.\end{aligned}\right.$$
Преобразуем первое уравнение с помощью формул суммы синусов и суммы тангенсов:
$$2\operatorname{sh}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{ch}\frac{\varphi-\psi}{2}+\frac{\operatorname{sh}(\varphi+\psi)}{\operatorname{ch}\varphi\operatorname{ch}\psi}=0\Leftrightarrow 2\operatorname{sh}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{ch}\frac{\varphi-\psi}{2}+\frac{2\operatorname{sh}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{ch}\frac{\varphi+\psi}{2}}{\operatorname{ch}\varphi\operatorname{ch}\psi}=0.$$
Таким образом, уравнение сводится к совокупности:
$$\left[\begin{aligned}\operatorname{sh}\tfrac{\varphi+\psi}{2}&=0,\\ \operatorname{ch}\tfrac{\varphi-\psi}{2}+\tfrac{\operatorname{ch}\frac{\varphi+\psi}{2}}{\operatorname{ch}\varphi\operatorname{ch}\psi}&=0.\end{aligned}\right.$$
Из первого уравнения легко найти, что $\psi=-\varphi$, а второе несовместно, поскольку гиперболические косинусы всегда положительны. Теперь воспользуемся вторым уравнением системы:
$$-\operatorname{sh}\varphi-\operatorname{sh}\varphi=1\Leftrightarrow\operatorname{sh}\varphi=-1/2\Leftrightarrow x=-1/2.$$

2 способ.

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \sin(\operatorname{arctg} x)$. Заметим, что уравнение можно записать в виде
$$f(x) + f(x+1) = 0.$$
Эта функция возрастает на R и нечетна, а значит, следующие преобразования будут равносильными:
$$-f(x) = f(x+1) \Leftrightarrow f(-x) = f(x+1) \Leftrightarrow -x = x+1 \Leftrightarrow x = -1/2.$$

Ответ: $x = -1/2$.

Задача 8. *Решить уравнение*
$$4x^3 + 3x + (4x^2+1)\sqrt{1+x^2} = 2.$$

Область допустимых значений: $x \in R$. Положим $x = \operatorname{sh}\varphi$, $\varphi \in R$. Уравнение примет следующий вид:
$$4\operatorname{sh}^3\varphi + 3\operatorname{sh}\varphi + (4\operatorname{sh}^2\varphi + 1)\operatorname{ch}\varphi = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sh}3\varphi + (2\operatorname{ch}2\varphi - 1)\operatorname{ch}\varphi = 2.$$
Проведем упрощения:
$$\operatorname{sh}3\varphi + 2\operatorname{ch}\varphi\operatorname{ch}2\varphi - \operatorname{ch}\varphi = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sh}3\varphi + \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{ch}3\varphi - \operatorname{ch}\varphi = 2 \Leftrightarrow e^{3\varphi} = 2 \Leftrightarrow e^{\varphi} = \sqrt[3]{2}.$$
Подставив это выражение в определение гиперболического синуса, получим:
$$x = \operatorname{sh}\varphi = \frac{\sqrt[3]{2} - 1/\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt[3]{4}-1}{2\sqrt[3]{2}}$.

Задача 9. *Решить систему*
$$\begin{cases} x^3y + xy^3 = 1, \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение в следующем виде:
$$\left(\frac{|x|}{\sqrt[4]{3}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt[4]{3}}\right)^2 = 1.$$
Рассмотрим сначала $x \geqslant 0$. Положим $x = \sqrt[4]{3}\operatorname{ch}\varphi$, $y = \sqrt[4]{3}\operatorname{sh}\varphi$, $\varphi \in R$. При таких обозначениях второе уравнение станет тождеством, а первое можно упростить следующим образом:
$$3\operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi\left(\operatorname{ch}^2\varphi + \operatorname{sh}^2\varphi\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\operatorname{sh}2\varphi\operatorname{ch}2\varphi = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sh}4\varphi = \frac{4}{3}.$$
Отсюда найдем $\varphi = \sqrt[4]{3}$. Следовательно,
$$x = \frac{\sqrt{3}+1}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Случай $x < 0$ рассматривается аналогично.

Ответ: $x = \pm(\sqrt{3}+1)/2$, $y = \pm(\sqrt{3}-1)/2$ *(всего два решения, т. е. знаки согласованы).*

Задача 10. *Решить систему*

$$\begin{cases} \frac{y}{x} - xy = 1, \\ \frac{z}{y} - 4yz = 2, \\ \frac{x}{z} - 4zx = 4. \end{cases}$$

Область допустимых значений состоит из троек чисел $(x;\ y;\ z)$, в которых ни одна составляющая не равна нулю.

Решим каждое уравнение относительно одной переменной:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{1-x^2}, \\ z = \frac{2y}{1-4y^2}, \\ x = \frac{4z}{1-4z^2}. \end{cases}$$

Этот переход не был равносильным: у новой системы область допустимых значений состоит из троек чисел $(x;\ y;\ z)$, в которых, во-первых, $x \neq \pm 1$ ни при каких y, z, во-вторых, $y \neq \pm 1/2$ ни при каких x, z, в-третьих, $z \neq \pm 1/2$ ни при каких x, y. Проверкой можно убедиться, что каждое из равенств $x = \pm 1$, $y = \pm 1/2$, $y = \pm 1/2$ делает исходную систему несовместной.

Положим $x = \operatorname{tg}\varphi$, $\varphi \in (-\pi/2;\ \pi/2) \setminus \{\pm\pi/4\}$. Тогда первое уравнение примет вид

$$y = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{2}.$$

С помощью этого соотношения выразим z из второго уравнения:

$$z = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi}{2}.$$

Аналогичным образом из третьего уравнения найдем

$$x = \operatorname{tg} 8\varphi.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} 8\varphi - \operatorname{tg}\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 7\varphi}{\cos\varphi \cos 8\varphi} = 0.$$

Значит, надо решить уравнение $\sin 7\varphi = 0$ и проверить условие $\cos\varphi\cos 8\varphi \neq 0$. Таким образом, получим:

$$\varphi \in \left\{0;\ \pm\frac{\pi}{7}\ \ \pm\frac{2\pi}{7};\ \pm\frac{3\pi}{7}\right\}.$$

Если $\varphi = 0$, то $x = y = z = 0$, что не соответствует области допустимых значений — другие же значения подходят.

Ответ: $x = \operatorname{tg}\varphi$, $y = \operatorname{tg} 2\varphi/2$, $z = \operatorname{tg} 4\varphi/2$, *где* $\varphi \in \{\pm\pi/7;\ \pm 2\pi/7;\ \pm 3\pi/7\}$.

Задача 11. *Решить систему*

$$\begin{cases} \sqrt{1-4x^2} - \sqrt{1-4y^2} = 2(x+y), \\ x^2 + y^2 + 4xy = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Область допустимых значений: $-1/2 \leqslant x, y \leqslant 1/2$. Положим $x = \cos\varphi/2$, $\varphi \in [0;\ \pi]$, $y = \cos\psi/2$, $\psi \in [0;\ \pi]$. Тогда систему легко привести к следующему виду:

$$\begin{cases} \sin\varphi - \sin\psi = \cos\varphi + \cos\psi, \\ \cos^2\varphi + \cos^2\psi + 4\cos\varphi\cos\psi = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

(напомним, что выбор множеств изменения новых переменных позволяет однозначно раскрыть модули при упрощении выражений с корнями).

Первое уравнение приведем к виду

$$2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2},$$

что равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{\varphi+\psi}{2} = 0, \\ \sin\frac{\varphi-\psi}{2} = \cos\frac{\varphi-\psi}{2}. \end{array} \right.$$

С учетом того, что $\varphi,\ \psi \in [0;\ \pi]$, получим из каждого уравнения совокупности по одному соотношению для φ и ψ:

$$\left[\begin{array}{l} \psi = \pi - \varphi, \\ \psi - \frac{\pi}{2} = \varphi. \end{array} \right.$$

Подставив первое выражение для ψ во второе уравнение системы, получим, что $\cos\varphi = \pm 1/\sqrt{2}$, $\cos\psi = \cos(\pi - \varphi) = \mp 1/\sqrt{2}$. Следовательно,

$$x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \ y = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Второе уравнение совокупности рассматривается аналогично и дает те же решения.

Ответ: $x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \ y = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 12. *Решить уравнение*

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10 = 0.$$

Первые два члена напоминают формулу четвертой степени разности. Попробуем упростить уравнение, выделив четвертую степень разности в левой части:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x^2 - 4x + 4x + 1 - 1 + 3x^2 + 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^4 - 3x^2 + 12x - 11 = 0.$$

Оставшийся в правой части квадратный трехчлен от x легко привести к квадратному трехчлену относительно $(x-1)$. Тогда уравнение примет вид

$$(x-1)^4 - 3(x-1)^2 + 6(x-1) - 2 = 0.$$

Положим $x - 1 = \operatorname{tg}\varphi$, $\varphi \in (-\pi;\ \pi)$. При таких φ умножение на $\cos^4\varphi$ будет равносильным переходом. Поэтому можно переписать уравнение в следующем виде:

$$\sin^4\varphi - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 6\sin\varphi\cos^3\varphi - 2\cos^4\varphi = 0.$$

Перейдем к функциям от 2φ. После упрощений получим:

$$2\cos^2 2\varphi + 6\sin 2\varphi\cos 2\varphi + 6\sin 2\varphi - 6\cos 2\varphi - 4 = 0.$$

Заметим, что

$$2\cos^2 2\varphi = 1+\cos 4\varphi = 1+\cos^2 2\varphi-\sin^2 2\varphi = 1+(\cos 2\varphi+\sin 2\varphi)(\cos 2\varphi-\sin 2\varphi).$$

Таким образом, приведем уравнение к виду

$$(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi) - 3 + 6\sin 2\varphi\cos 2\varphi + 6(\sin 2\varphi - \cos 2\varphi) = 0.$$

Теперь воспользуемся тем, что $(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)^2 = 1 - 2\sin 2\varphi\cos 2\varphi$:

$$(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi) + 6(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi) + 3(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)^2 = 0.$$

Значит, уравнение сводится к совокупности

$$\left[\begin{array}{r} \cos 2\varphi - \sin 2\varphi = 0, \\ \cos 2\varphi + \sin 2\varphi + 6 + 3(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi) = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} \operatorname{tg} 2\varphi = 1, \\ \sin 2\varphi - 2\cos 2\varphi = 3, \end{array}\right.$$

которая, в свою очередь, равносильна следующей:

$$\left[\begin{array}{r} \varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z, \\ \sqrt{5}\sin\left(2\varphi - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 3. \end{array}\right.$$

Второе уравнение несовместно, поскольку его левая часть не превосходит $\sqrt{5} < 3$. Из первого получим $\varphi = \pi/8$ и $\varphi = -3\pi/8$. Из соотношения

$$\frac{2\operatorname{tg}(\pi/8)}{1 - \operatorname{tg}^2(\pi/8)} = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$$

легко найти, что $\operatorname{tg}(\pi/8) = \sqrt{2}-1$, откуда $x = 1+\operatorname{tg}(\pi/8) = \sqrt{2}$. Аналогичным образом найдем другой корень: $x = -\sqrt{2}$.

Ответ: $x = \pm\sqrt{2}$.

В задачах уже встречались некоторые «неклассические» значения тригонометрических функций. Назовем еще несколько таких значений:

$$\begin{array}{r} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \\ \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3},\ \operatorname{ctg} 15^\circ = 2 + \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1,\ \operatorname{ctg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} + 1, \\ \operatorname{tg} 67^\circ 30' = \sqrt{2} + 1,\ \operatorname{ctg} 67^\circ 30' = \sqrt{2} - 1, \\ \operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3},\ \operatorname{ctg} 75^\circ = 2 - \sqrt{3}, \\ \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \\ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4},\ \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \\ \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{10-\sqrt{20}}+\sqrt{3}+\sqrt{15}+8}}{4}. \end{array}$$

Поясним, что $\cos 36^\circ$ можно найти из следующих соображений. Заметим, что $\cos 72^\circ + \cos 108^\circ = 0$. Это соотношение с помощью формул косинуса двойного и тройного аргумента легко привести к кубическому уравнению относительно $c = \cos 36^\circ$: $4c^3+2c^2-3c-1 = 0$. Можно угадать его корень: $c = -1$. Значит, раскладывая левую часть на множители, найдем единственный положительный корень — искомое значение.

Вообще, тригонометрические функции целого числа градусов можно выразить в радикалах тогда и только тогда, когда это число делится на три.

6 Теория алгебраических уравнений

При решении кубических уравнений общего вида неожиданно оказываются удобными выражения с тригонометрическими функциями.

Рассмотрим уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a, b, c, d \in R,\ a \neq 0. \tag{17}$$

Теорема 1. *Уравнение (17) можно привести к каноническому виду*

$$y^3 + py + q = 0 \tag{18}$$

с помощью линейной замены.

Поделив уравнение (17) на a и выделяя полный куб в левой части, приведем (17) к виду (18). Отметим, что величины, фигурирующие в этих уравнениях, связаны следующим образом:

$$y = x + \frac{b}{3a},\ p = \frac{3ac - b^2}{3a^2},\ q = \frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3}.$$

Обозначим через N количество различных действительных корней (18). Положим $\Delta = q^2/4 + p^3/27$.

Теорема 2. *Величина N зависит от p и Δ следующим образом:*

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$p > 0$	$N = 1$	-	-
$p = 0$	$N = 1$	$N = 1$	-
$p < 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$

Разберем отдельно возможные случаи.

1. Пусть $p > 0$. Рассмотрим функцию $f(y) = y^3 + py + q$. Она возрастает на R, следовательно, уравнение $f(y) = 0$ имеет не более одного корня.

   Рассмотрим три множества, в которых может находиться q.

   - Пусть $q > 0$. Функция $f(\cdot)$ непрерывна, причем $f(0) = q > 0$, $f\left(-\sqrt[3]{q}\right) = -p\sqrt[3]{q} < 0$. Значит, на промежутке $\left(-\sqrt[3]{q};\ 0\right)$ существует хотя бы один корень.[6]
   - Если $q < 0$, то аналогичным образом получим, что единственный корень находится на промежутке $\left(0;\ -\sqrt[3]{q}\right)$.
   - Если $q = 0$, то, очевидно, единственным корнем будет $x = 0$.

   Легко проверить, что положительность p является достаточным условием для положительности Δ. Первая строка таблицы получена.

2. Если $p = 0$, то, очевидно, единственным корнем будет $x = -\sqrt[3]{q}$. Кроме того, этого условия достаточно для неотрицательности Δ. Вторая строка таблицы получена.

[6] Лекции были посвящены вопросам элементарной математики, поэтому я думаю, что такого уровня строгости достаточно.

3. Пусть $p < 0$. Положим

$$y = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}z,\ r = \frac{3q}{2p}.$$

Тогда уравнение (18) легко привести к виду

$$4z^3 - 3z = r.$$

Лемма 1. *Имеют место следующие зависимости. Во-первых,* $|r| < 1 \Leftrightarrow \Delta < 0$. *Во-вторых,* $|r| = 1 \Leftrightarrow \Delta = 0$. *В-третьих,* $|r| > 1 \Leftrightarrow \Delta > 0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости этого утверждения.

Лемма 2. *Если* $|r| < 1$, *то* $N = 3$.

Если $|r| < 1$, то и $|z| < 1$. (Предположим противное. Тогда $1 > |r| = |z| \cdot \left|4z^2 - 3\right| \geqslant 1 \cdot (4 - 3) = 1$, что невозможно.) Значит, существует такое $\varphi \in (0;\ \pi)$, что $z = \cos\varphi$. Таким образом,

$$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = r \Leftrightarrow \cos 3\varphi = r \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pm\alpha + 2\pi k}{3},\ k \in Z,\ \alpha = \arccos r.$$

Условию $\varphi \in (0;\ \pi)$ удовлетворяют три различных значения:

$$\varphi = \frac{\alpha}{3},\ \varphi = \frac{2\pi \pm \alpha}{3}.$$

Этим значениям соответсвует ровно три различных корня:

$$y = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\varphi. \tag{19}$$

Лемма 3. *Если* $|r| = 1$, *то* $N = 2$.

Возможно два случая.

- Если $r = 1$, то уравнение принимает вид

  $$4z^3 - 3z = 1 \Leftrightarrow 4(z - 1)\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

  Таким образом, уравнение имеет ровно два различных корня.
- Случай $r = -1$ рассматривается аналогично.

Лемма 4. *Если* $|r| > 1$, *то* $N = 1$.

Если $|r| > 1$, то и $|z| > 1$. (Предположим противное. Тогда существует такое $\varphi \in [0;\ \pi]$, что $z = \cos\varphi$. Значит, $\cos 3\varphi = r$, что невозможно, если $|r| > 1$.) Найдем отдельно положительные и отрцательные корни.

- Найдем сначала положительные корни. Возьмем $z = \operatorname{ch}\psi$, $\psi \geqslant 0$. Тогда уравнение примет вид

  $$4\operatorname{ch}^3\psi - 3\operatorname{ch}\psi = r \Leftrightarrow \operatorname{ch} 3\psi = r.$$

  Если $r > 1$, то получим единственное значение $\psi = \operatorname{arch} r/3$, откуда получим единственный корень. Если же $r < -1$, то уравнение несовместно.

- Аналогично можно показать, что уравнение имеет ровно один отрицательный корень при $r < -1$ и не имеет отрицательных корней при $r > 1$.

Таким образом, если $|r| > 1$, то $N = 1$. Заметим, что если выразить y через r, то получим явную формулу для единственного действительного корня, однако позже будет выведена более удобная формула.

Принимая во внимание леммы 1–4, получим и третью строку таблицы. Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 3. *Пусть известен один корень α уравнения (18). Тогда два других (если существуют) можно найти из квадратного уравнения*

$$y^2 + \alpha y + \alpha^2 + p = 0.$$

По условию,

$$\begin{cases} y^3 + py + q = 0, \\ \alpha^3 + p\alpha + q = 0. \end{cases}$$

Вычтем второе равенство из первого:

$$y^3 - \alpha^3 + py - p\alpha = 0 \Leftrightarrow (y - \alpha)(y^2 + \alpha y + \alpha^2 + p) = 0.$$

Таким образом, с помощью разложения на множители получаем квадратное уравнение для неизвестных корней уравнения.

Теорема 4. *Если известно количество N различных действительных корней уравнения (18), то их можно найти следующим образом.*

1. *Если $N = 1$, то*

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

(формула Кардано).

2. *Если $N = 2$, то*

$$y_1 = -\sqrt[3]{4q}, \ y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

3. *Если $N = 3$, то*

$$y_{1,2,3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \varphi_{1,2,3}, \tag{20}$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{3}, \ \varphi_{2,3} = \frac{2\pi \pm \alpha}{3}, \ \alpha = \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right). \tag{21}$$

Предположим сначала, что $\Delta \geqslant 0$. Будем искать y в виде суммы двух чисел, которые надо определить:

$$y = s + t, \ s \geqslant t.$$

Тогда

$$y^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3 = s^3 + t^3 + 3st(s + t) = s^3 + t^3 + 3sty.$$

С другой стороны, выразим y^3 из уравнения (18). Таким образом,

$$-py - q = s^3 + t^3 + 3sty.$$

Две линейные функции от y тождественно равны, если равны соответствующие коэффициенты. Следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{r} 3st = -p, \\ s^3 + t^3 = -q. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} s^3t^3 = -\frac{p^3}{27}, \\ s^3 + t^3 = -q. \end{array} \right.$$

Значит, s^3 и t^3 — соответственно наибольший и наименьший корни квадратного уравнения[7]

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Его дискриминант равен

$$D = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 4\Delta.$$

Эта величина, по нашему предположению, неотрицательна. Значит,

$$w_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta},$$

откуда

$$y = s + t = \sqrt[3]{w_1} + \sqrt[3]{w_2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}.$$

Полученная формула называется формулой Кардано в честь ученого, который впервые опубликовал ее.

Как видно из теоремы 2, если $\Delta > 0$ или $p = 0$, то корень единственный. Значит, если $N = 1$, то формула Кардано дает решение уравнения. Первый пункт теоремы доказан.

Пусть $N = 2$. По теореме 2, это равносильно тому, что $\Delta = 0$ и $p < 0$. Формула Кардано остается в силе и дает один корень:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{4q}.$$

Тогда другой корень (т. е. два совпадающих) легко найти с помощью теоремы 3:

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Второй пункт теоремы доказан.

---

[7] Несложно убедиться, что система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{r} u + v = a, \\ uv = b \end{array} \right.$$

имеет, если разрешима, решения вида (x_1, x_2) и (x_2, x_1), где $x_{1,2}$ — корни уравнения $x^2 - ax + b = 0$.

Пусть $N = 3$. По теореме 2, это равносильно тому, что $\Delta < 0$ и $p < 0$. В этом случае найти решения в радикалах нельзя[8], но можно получить решения через тригонометрические функции. А именно, они были получены в ходе доказательства леммы 2 (формула (19)). Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим требуемые выражения (20) и (21). Таким образом, и третий пункт теоремы доказан.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. *Решить уравнение*

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Заметим, что для этого уравнения $\Delta = -3/4 < 0$. Значит, существует три корня. Формула (20) после упрощений даст

$$x_{1,2,3} = 2\cos\varphi,$$

где φ принимает значения $2\pi/9$, $4\pi/9$ и $8\pi/9$.

Ответ: $x = 2\cos\varphi$, *где* $\varphi \in \{2\pi/9,\ 4\pi/9,\ 8\pi/9\}$.

Задача 2. *Решить уравнение*

$$x^3 + 15x + 124 = 0.$$

Здесь $\Delta = 3969 > 0$. Значит, единственный корень дает формула Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-62 + \sqrt{3969}} + \sqrt[3]{-62 - \sqrt{3969}} = \sqrt[3]{-62 + 63} + \sqrt[3]{-62 - 63} = 1 - 5 = -4.$$

Ответ: $x = -4$.

Задача 3. *Решить уравнение*

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Здесь $\Delta = 5 > 0$, и по формуле Кардано получим единственный корень:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

С другой стороны, несложно убедиться, что уравнению удовлетворяет $x = 1$. Получаем интересное тождество:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1.$$

Ответ: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

Задача 4. *Решить уравнение*

$$x^3 - 3x - \left(a^3 + a^{-3}\right) = 0 \ (a \neq 0).$$

Несложно убедиться, что здесь $\Delta = \left(a^3 - a^{-3}\right)^2/4 \geqslant 0$. Значит, уравнение имеет не более двух корней, причем один можно найти по формуле Кардано. После упрощений получим:

$$x_1 = a + a^{-1}.$$

[8] Если работать с комплексными числами, то формула Кардано остается в силе и дает все решения, поскольку комплексные корни — многозначные функции. Но мы ограничиваемся рассмотрением действительных чисел, и поэтому надо отдельно разбирать случай $\Delta < 0$.

Если $\Delta > 0 \Leftrightarrow |a| \neq 1$, то этот корень единственный. Если $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$, то первый корень будет равен $x_1 = \pm 2$, а другой найдем с помощью теоремы 3: $x_2 = \mp 1$.

Ответ. Если $a = \pm 1$, *то* $x = \pm 2$ *или* $x = \mp 1$, *иначе* — $x = a + a^{-1}$.

Отметим, что квадратные уравнения умели решать уже в глубокой древности. Например, известна следующая древнеиндийская задача:

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь,
Обезьян там было в роще?

(Если обозначить требуемое количество обезьян за x, то получим, что $(x/8)^2 + 12 = x$, откуда $x = 16$ или $x = 48$.)

Уравнения третьей и четвертой степеней человечество научилось решать только в XVI веке. В XIX веке было доказано, что для уравнения пятой (и любой более высокой) степени общей формулы не существует.

Считая излишним разбор уравнения четвертой степени общего вида, рассмотрим один пример[9]:

$$x^4 - 10x^2 - 8x + 5 = 0.$$

Приведем его к виду

$$x^4 + 2x^2 s + s^2 = 10x^2 + 8x - 5 + 2x^2 s + s^2,$$

что равносильно уравнению

$$\left(x^2 + s\right)^2 = (10 + 2s)x^2 + 8x + s^2 - 5. \tag{22}$$

В левой части получился полный квадрат — подберем s так, чтобы и правая часть была полным квадратом. Для этого потребуем, чтобы дискриминант трехчлена в правой части был равен нулю:

$$16 - (10 + 2s)\left(s^2 - 5\right) = 0 \Leftrightarrow s^3 + 5s^2 - 5s - 33 = 0.$$

Таким образом, получаем кубическое уравнение для s. Ему удовлетворяет $s = -3$. Подставив это значение в (22), получим:

$$\left(x^2 - 3\right)^2 = 4(x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3 = \pm 2(x + 1).$$

Значит, уравнение четвертой степени распадается на два квадратных. Из них получим $x = 1 \pm \sqrt{6}$ и $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Таким образом, найдено четыре различных корня уравнения.

[9] Уравнение четвертой степени общего вида можно с помощью линейной замены привести к каноническому виду с единичным коэффициентом при x^4 и нулевым при x^3. Для этого надо выделить четвертую степень суммы. Основные идеи состоят именно в решении уравнения $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

7 Задачи анализа

7.1 Задачи элементарной математики, близкие к математическому анализу

Задача 1. *Известно, что x, y и z связаны соотношениями*

$$\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 1, \\ z = x^2 + 2y^2. \end{cases}$$

Найти наибольшее и наименьшее значения z.

Перепишем первое равенство в следующем виде:

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}y}{2}\right)^2 = 1.$$

Оно станет тождеством, если положить

$$x - \frac{y}{2} = \cos\varphi,\ \ \frac{\sqrt{7}y}{2} = \sin\varphi,\ \ \varphi \in (-\pi;\ \pi].$$

Выразим отсюда x и y и подставим во второе равенство условия. Раскроем скобки и понизим степени с помощью формул двойных аргументов. После упрощений получим:

$$z = \frac{\sqrt{7}\sin 2\varphi - \cos 2\varphi + 8}{7}.$$

Преобразуем это выражение с помощью метода дополнительного аргумента:

$$z = \frac{\sqrt{8}\sin(2\varphi - \alpha) + 8}{7},\ \ \alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Так как синус успевает принять все свои значения при $\varphi \in (-\pi;\ \pi]$, то можно сделать вывод, что

$$\frac{8 - \sqrt{8}}{7} \leqslant z \leqslant \frac{8 + \sqrt{8}}{7}.$$

Ответ: $z_{\max} = (8 + \sqrt{8})/7$, $z_{\min} = (8 - \sqrt{8})/7$.

Задача 2. *Пусть*

$$z = |x|\sqrt{16 - y^2} + |y|\sqrt{4 - x^2}.$$

Какое наибольшее значение может принимать z?

Перепишем равенство в следующем виде:

$$z = |x|\sqrt{16 - |y|^2} + |y|\sqrt{4 - |x|^2}.$$

Модули неотрицательны и при этом должны обеспечивать существование корней. Значит, $0 \leqslant |x| \leqslant 2$, $0 \leqslant |y| \leqslant 4$. Положим $|x| = 2\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $|y| = 4\sin\psi$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$. Тогда

$$z = 2\sin\varphi \cdot 4\cos\psi + 4\sin\psi \cdot 2\cos\varphi = 8\sin(\varphi + \psi) \leqslant 8.$$

Равенство достигается: для этого надо взять, например, $\varphi = \psi = \pi/4$. Следовательно, $z_{\max} = 8$.

Ответ: $z_{\max} = 8$.

Задача 3. *Пусть*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geqslant 6, \\ t = x + z. \end{cases}$$

При каких x, y, z, v величина t принимает наибольшее значение?

Первые два равенства станут тождествами, если взять $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $z = 3\cos\psi$, $v = 3\sin\psi$, $\varphi,\ \psi \in (-\pi;\ \pi]$. Тогда неравенство легко привести к виду

$$\sin(\varphi + \psi) \geqslant 1.$$

В силу ограниченности синуса знак неравенства можно заменить на знак равенства. Из этого уравнения получим, что

$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Так как $-\pi < \varphi,\ \psi \leqslant \pi$, то подходят только $n = 0$ и $n = -1$. Таким образом,

$$\left[\begin{aligned} \psi &= \tfrac{\pi}{2} - \varphi, \\ \psi &= -\tfrac{3\pi}{2} - \varphi. \end{aligned}\right.$$

Преобразуем t с помощью первого уравнения совокупности:

$$t = 2\cos\varphi + 3\cos\psi = 2\cos\varphi + 3\sin\varphi = \sqrt{13}\sin\left(\varphi + \arccos\frac{3}{\sqrt{13}}\right).$$

Значит, t принимает наибольшее значение при

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{3}{\sqrt{13}} + 2\pi k = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} + 2\pi k,\ k \in Z,$$

откуда $x = 4/\sqrt{13}$, $y = 6/\sqrt{13}$, $z = 9/\sqrt{13}$, $v = 6/\sqrt{13}$.

Второе уравнение совокупности рассматривается аналогично и дает тот же результат.

Ответ: $x = 4/\sqrt{13}$, $y = 6/\sqrt{13}$, $z = 9/\sqrt{13}$, $v = 6/\sqrt{13}$.

7.2 Задачи по курсу математического анализа

Задача 1. *Показать, что существует однозначная функция $y(x)$, определяемая уравнением*

$$y^3 + 3y = x.$$

Допустимыми являются все $y \in R$. Положим $y = 2\operatorname{sh}\varphi$. Тогда уравнение легко привести к виду

$$8\operatorname{sh}^3\varphi + 6\operatorname{sh}\varphi = x \Leftrightarrow 2\operatorname{sh}3\varphi = x \Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{3}\operatorname{arsh}\frac{x}{2}.$$

Следовательно,

$$y = 2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arsh}\frac{x}{2}\right).$$

Таким образом, вспомогательная переменная φ помогла установить однозначное отображение $\{x\} \to \{y\}$, соответствующее равенству, фигурирующему в условии.

Задача 2. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$$

Напомним, что неопределенный интеграл — это множество всех первообразных данной функции, причем каждая из них отличается от другой на постоянную величину, а значит, достаточно найти какую-то одну первообразную. Поэтому будем искать неопределенные интегралы с точностью до постоянных интегрирования.

Здесь выражение упростится, если взять $x = 2\operatorname{sh}\varphi$, $\varphi \in R$. Действительно, тогда знаменатель дроби примет вид

$$\sqrt{(x^2+4)^3} = \sqrt{\left(4\operatorname{sh}^2\varphi + 4\right)^3} = 8\operatorname{ch}^3\varphi.$$

Кроме того,

$$dx = 2\operatorname{ch}\varphi d\varphi.$$

Поэтому весь интеграл будет равен

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \int \frac{2\operatorname{ch}\varphi d\varphi}{8\operatorname{ch}^3\varphi} = \frac{1}{4}\int \frac{d\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi} = \frac{\operatorname{th}\varphi}{4}.$$

Так как $\operatorname{sh}\varphi = x/2$, $\operatorname{ch}\varphi = +\sqrt{x^2/4+1}$, то получим, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \frac{1}{4}\frac{x/2}{\sqrt{x^2/4+1}} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}.$$

Ответ: $\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}$.

Задача 3. *Пусть* $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n$. *Найти* $\frac{d}{dx}\ln y$.

Положим $x = \operatorname{sh}\varphi$, $\varphi \in R$, откуда $dx/d\varphi = \operatorname{ch}\varphi$. Тогда

$$y = \left(\operatorname{sh}\varphi + \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\varphi}\right)^n = (\operatorname{sh}\varphi + \operatorname{ch}\varphi)^n = e^{n\varphi},$$

а следовательно, $d\ln y/d\varphi = n$. Значит,

$$\frac{d\ln y}{dx} = \frac{d\ln y/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{n}{\operatorname{ch}\varphi} = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ответ: $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 4. *Найти производную функции, заданной параметрически:*

$$x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Положим $t = \operatorname{tg}\varphi$, $|\varphi| < \pi/2$. Тогда придем к следующим выражениям:

$$x = \arcsin(\sin\varphi),\ y = \arccos(\cos\varphi).$$

Из первого, очевидно, получим, что $x = \varphi$. Для упрощения второго рассмотрим два случая.

1. Если $\varphi > 0$, то
$$y = \arccos(\cos\varphi) = \varphi.$$

2. Если же $\varphi < 0$, то
$$y = \arccos(\cos\varphi) = \arccos(\cos(-\varphi)) = -\varphi.$$

Таким образом, $y = |\varphi|$, $\varphi \neq 0$.

Поэтому
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{\operatorname{sgn}\varphi}{1} = \operatorname{sgn}\varphi$$
(производная разрывна при $\varphi = 0$). Заметим, что знаки параметров t и φ совпадают.

Ответ: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sgn} t$ *(*$t \neq 0$*).*

Задача 5. *Найти неопределенный интеграл*
$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-3}}$$
(ограничиться рассмотрением положительных x*).*

Исходя из условия существования корня, положим $x = \sqrt{3}\operatorname{ch}\varphi$, $\varphi \geqslant 0$. Тогда $dx = \sqrt{3}\operatorname{sh}\varphi d\varphi$, и интеграл можно преобразовать следующим образом:
$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-3}} = \int \frac{3\sqrt{3}\operatorname{ch}^2\varphi\operatorname{sh}\varphi d\varphi}{\sqrt{3}\operatorname{sh}\varphi} = \frac{3}{2}\int(\operatorname{ch}2\varphi+1)d\varphi = \frac{3}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}2\varphi}{2}+\varphi\right).$$

Вернемся к первоначальным обозначениям, учитывая, что $\operatorname{sh}2\varphi/2 = \operatorname{ch}\varphi\sqrt{\operatorname{ch}^2\varphi-1} = x\sqrt{x^2-1}/3$.

Ответ: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{3}{2}\operatorname{arch}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Задача 6. *Найти неопределенный интеграл*
$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Положим $x = \operatorname{th}\varphi$, $\varphi \in R$, откуда $dx = d\varphi/\operatorname{ch}^2\varphi = d\varphi/\left(\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}\right)^2$. Упростим[10] подынтегральное выражение:
$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+1/\operatorname{ch}\varphi}{1-1/\operatorname{ch}\varphi} = \frac{\operatorname{ch}\varphi+1}{\operatorname{ch}\varphi-1} = \frac{\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Поэтому интеграл можно привести к виду
$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{d\varphi}{\left(\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}\right)^2} = I_1 - I_2,$$
где
$$I_1 = \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}\left(\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}\right)},\ I_2 = \int \frac{d\varphi}{\left(\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}\right)^2}.$$

[10]Не стоит забывать о другой полезной замене: $x = \sin\psi$, $-\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$.

Заметим, что
$$I_2=\int\frac{d\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi}=\operatorname{th}\varphi=x.$$
Преобразуем другую составляющую:
$$I_1=\int\tfrac{2d\varphi}{(\operatorname{ch}\varphi-1)\operatorname{ch}\varphi}=2\int\left(\tfrac{1}{\operatorname{ch}\varphi-1}-\tfrac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\right)d\varphi=\int\tfrac{d\varphi}{\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}}-2\int\tfrac{\operatorname{ch}\varphi d\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi}=$$
$$=2\int\tfrac{d\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}}-2\int\tfrac{d\operatorname{sh}\varphi}{1+\operatorname{sh}^2\varphi}=-2\operatorname{cth}\tfrac{\varphi}{2}-2\operatorname{arctg}\operatorname{sh}\varphi.$$

Ответ: $-2\operatorname{cth}\frac{\varphi}{2}-2\operatorname{arctg}\operatorname{sh}\varphi+x$, *где* $\varphi=\operatorname{arth}x$.

Задача 7. *Найти неопределенный интеграл*
$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Положим[11] $x=\operatorname{sh}^2\varphi$, откуда $dx=2\operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi d\varphi$. Тогда
$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int\frac{2\operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi d\varphi}{(1+\operatorname{sh}^2\varphi)\operatorname{sh}\varphi}=2\int\frac{d\operatorname{sh}\varphi}{1+\operatorname{sh}^2\varphi}=2\operatorname{arctg}\operatorname{sh}\varphi=2\operatorname{arctg}x.$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}x$.

Задача 8. *Найти неопределенный интеграл*
$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Положим $x=\sin\varphi$, откуда $dx=\cos\varphi d\varphi$. Значит,
$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\cos\varphi}=-\cos\varphi=-\sqrt{1-x^2}.$$

Ответ: $-\sqrt{1-x^2}$.

[11] Задачу легко решить без замены, но она удобна для демонстрации гиперболических преобразований.